

**MATEMÁTICAS III**  
**(Carrera de Economía)**  
**MÁS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS**  
**DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES**  
( <http://www.geocities.com/ajlasa> )

Sea una función de  $n$  variables independientes  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  continua y definida en un dominio dado y de la cual se pueden obtener derivadas parciales de orden dos o más.

Puntos críticos

Una condición **necesaria** para que  $f$  tenga un punto crítico (máximo o mínimo) en  $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0}$  es que en ese punto se cumpla que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = f_n = 0$$

La condición **suficiente** requiere una investigación de las derivadas de segundo orden evaluadas en  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ . Para ello, vamos a definir la matriz Hessiana como:

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n1} & \dots & f_{n1} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = f_{11}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = f_{22}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = f_{nn},$$
$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = f_{ki}; \quad k = (1, 2, \dots, n), i = (1, 2, \dots, n), i \neq k$$

La matriz  $H$  es una matriz simétrica suponiendo que se cumple el teorema de Young,

La función  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tiene en el punto  $P(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$

1. Un **máximo** local si la matriz H es **definida negativa**.

Una matriz simétrica es definida negativa si sus n menores principales alternan sus signos comenzando por un signo negativo. Por lo tanto la matriz H es definida negativa si:

$$|f_{11}| < 0, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

2. Un **mínimo** local si la matriz H es definida positiva.

Una matriz simétrica es definida positiva si sus n menores principales son todos positivos. Por lo tanto el punto crítico es un mínimo si la matriz H es definida positiva si:

$$|f_{11}| > 0, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

3. Un punto silla (no es máximo ni mínimo) si los n menores principales son distintos de cero y no cumplen con las condiciones para un máximo o mínimo dadas en los puntos (1) y (2) anteriores.

Ejemplos:

$$1. z = f(x, y, u) = x^2 + y^2 + u^2 - xy + x - 2u$$

La condición de primer orden para un óptimo es:

$$f_x = 2x - y + 1 = 0$$

$$f_y = 2y - x = 0$$

$$f_u = 2u - 2 = 0$$

$$\text{De } f_x = 0 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de la condición de primer orden:

$$2y - \frac{y-1}{2} = \frac{3y+1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3}}$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación:

$$x = \frac{-\frac{1}{3} - 1}{2} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

De la tercera ecuación:  $\boxed{u = 1}$

El punto crítico de la función se tiene cuando:  $x_0 = -\frac{2}{3}$ ;  $y_0 = -\frac{1}{3}$ ;  $u_0 = 1$

Vamos ahora a calcular las derivadas segundas para ver si se trata de un máximo o un mínimo.

$$f_{xx} = 2; \quad f_{yy} = 2; \quad f_{uu} = 2;$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -1; \quad f_{ux} = f_{xu} = 0; \quad f_{uy} = f_{yu} = 0;$$

La matriz Hessiana es:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son:

$$|H_1| = 2 > 0; \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0;$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

Puesto que todos los menores principales de  $H$  son positivos, el punto crítico es un **mínimo**.

$$2. \quad z = f(x, y, u) = -\left(x + \frac{y^2}{4x} + \frac{u^2}{y} + \frac{2}{u}\right); \quad x > 0, y > 0, u > 0$$

Dejamos al estudiante la tarea de demostrar que el punto crítico es un mínimo.