MATEMÁTICAS III

(Carrera de Economía)

MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

(http://www.geocities.com/ajlasa)

(El contenido de esta nota ha sido, en lo esencial, tomado de: P. Piskunov, Cálculo Diferencial e Integral, Ediciones Quinto Sol y Edward T. Dowling, Introduction to Mathematical Economics, Shaum's Outlines. Los ejemplos fueron tomados de Simon y Blume, Mathematics for Economists, W.W. Norton)

DEFINICIONES

1. Se dice que la función $z = f(x, y)$ tiene un **máximo** local en el punto $P(x_0, y_0)$ es decir, cuando $x = x_0$, $y = y_0$, si se cumple que:

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

para todos los puntos (x, y) suficientemente próximos y distintos al punto (x_0, y_0).

2. De igual manera, se dice que la función $z = f(x, y)$ tiene un **mínimo** local en el punto $P(x_0, y_0)$ es decir, cuando $x = x_0$, $y = y_0$, si se cumple que:

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

para todos los puntos (x, y) suficientemente próximos y distintos al punto (x_0, y_0).

Los puntos de máximo y de mínimo de $z = f(x, y)$ son los **extremos** de esa función

Una definición alternativa de los puntos de máximo y mínimo locales es la siguiente:

Se tiene $f(x_0, y_0)$ y hacemos $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, luego:

$$\Delta f = f\left(x,y\right) - f\left(x_0,y_0\right) = f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0,y_0\right)$$

Ahora tenemos:

1. Si $\Delta f < 0$ para todas las variaciones suficientemente pequeñas de las variables independientes, la función $f\left(x,y\right)$ tiene un **máximo** local en el punto $P\left(x_0,y_0\right)$.
2. Si $\Delta f > 0$ para todas las variaciones suficientemente pequeñas de las variables independientes, la función $f\left(x,y\right)$ tiene un **mínimo** local en el punto $P\left(x_0,y_0\right)$.

TEOREMAS

1. **Condición necesaria para la existencia de un extremo**: Si la función $z = f\left(x,y\right)$ tiene un extremo cuando $x = x_0, \quad y = y_0$ entonces cada derivada parcial de primer orden de z se anula para estos valores de las variables independientes o bien la derivada no existe. Los puntos de la función donde se verifica que las derivadas parciales de primer orden son cero o no existen son **puntos críticos** de la función.

Nótese que la existencia de puntos críticos es una condición **necesaria** para un extremo, es decir, los extremos (máximos o mínimos) de una función son puntos críticos. Sin embargo, no en todos los casos en que las derivadas parciales sean cero o no existan tendremos extremos. En otras palabras, la existencia de puntos críticos de una función **no es suficiente** para la existencia de un punto extremo.

2. Prueba de las segundas derivadas: Tenemos una función $z = f\left(x,y\right)$ definida en un dominio en el que está el punto $P\left(x_0,y_0\right)$ y que tiene derivadas parciales continuas al menos de hasta segundo orden. Suponemos que en $P\left(x_0,y_0\right)$ se anulan las derivadas parciales de primer orden. Esto es:

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} = 0$$

Luego, se puede demostrar que $P\left(x_0, y_0\right)$ es:

1. Un <u>**máximo,**</u> si evaluadas las derivadas parciales de segundo orden en $x = x_0, \quad y = y_0$ se tiene que:

$$f_{xx} < 0$$

Y

$$f_{xx}\ f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 > 0$$

2. Un <u>**mínimo**</u>, si evaluadas las derivadas parciales de segundo orden en $x = x_0, \quad y = y_0$ se tiene que:

$$f_{xx} > 0$$

Y

$$f_{xx}\ f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 > 0$$

3. <u>**No es máximo ni mínimo**</u> si evaluadas las derivadas parciales de segundo orden en $x = x_0, \quad y = y_0$ se tiene que:

$$f_{xx}\ f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 < 0$$

Este caso se le denomina **punto silla.** En un punto silla, la función $z = f\left(x, y\right)$ tiene un mínimo en alguna dirección y un máximo en otra dirección.

4. Se **<u>requiere más análisis</u>** para decidir si $P(x_0, y_0)$ es un punto extremo cuando:

$$f_{xx}\ f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = 0$$

LA MATRIZ HESSIANA

Para evaluar la condición de segundo orden para un extremo resulta conveniente construir una **matriz** con las derivadas parciales de segundo orden llamada matriz Hessiana de esta manera:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

H es una matriz simétrica si se cumple el teorema de Young, esto es, $f_{xy} = f_{yx}$
Donde las derivadas parciales están evaluadas en el punto $P(x_0, y_0)$. Definimos el determinante de la matriz Hessiana como $|H|$. Entonces en ese punto tenemos:

1. Un **<u>máximo,</u>** si:

$$f_{xx} < 0$$

Y

$$|H| > 0$$

2. Un **<u>mínimo,</u>** si:

$$f_{xx} > 0$$

Y

$$|H| > 0$$

3. **<u>No es máximo ni mínimo</u>** **(un punto silla)** si:

$$\left|H\right| < 0$$

4. Se **<u>requiere más análisis</u>** si:

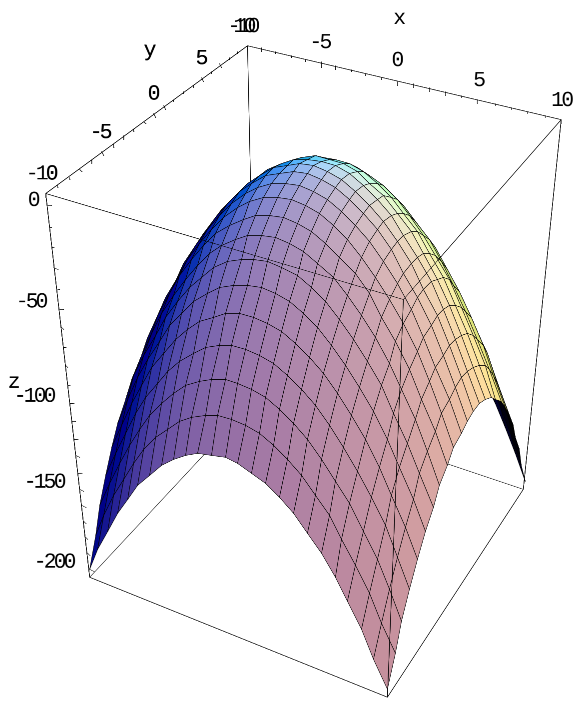
$$\left|H\right| = 0$$

Ejemplos:

Encontrar los puntos críticos y verificar si son extremos mediante la condición de segundo orden.

1. $z = f\left(x, y\right) = -x^2 - y^2$

Podemos ver en la gráfica siguiente que la función parece tener un máximo. Vamos a comprobarlo.



La condición de primer orden es:

$$f_x = -2x = 0$$
$$f_y = -2y = 0$$

De manera que el punto crítico de la función es: $x_0 = 0,\; y_o = 0$

Ahora probamos la condición de segundo orden para los cual calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = -2,\; f_{yy} = -2,\; f_{xy} = f_{yx} = 0$$

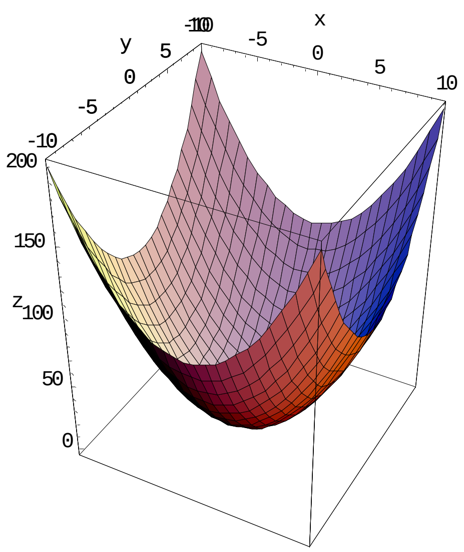
De manera que tenemos $f_{xx} < 0,$ y

$f_{xx}\, f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 > 0$, En efecto: $(-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$

De manera que la función $z = f(x,y) = -x^2 - y^2$ tiene un máximo en el punto $P(0,0)$.

2. $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

Podemos ver en la gráfica siguiente que la función parece tener un mínimo. Vamos a verificarlo.



La condición de primer orden es:

$$f_x = 2x = 0$$
$$f_y = 2y = 0$$

De manera que el punto crítico de la función es: $x_0 = 0,\ y_o = 0$

Ahora probamos la condición de segundo orden para los cual calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = 2,\ f_{xy} = f_{yx} = 0$$

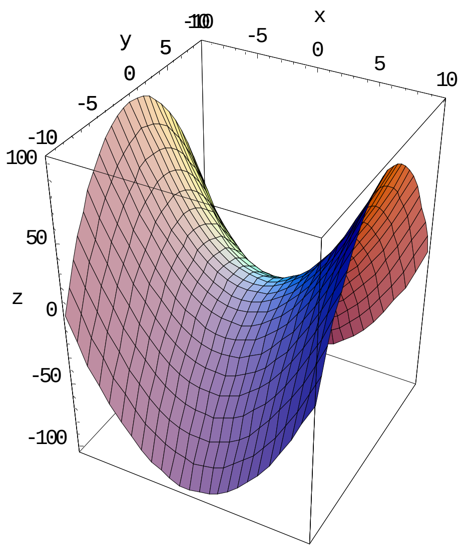
De manera que $f_{xx} > 0$

Y $f_{xx}\ f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 > 0$, En efecto: $(2)(2) - (0)^2 = 4 > 0$

Vemos entonces que la función $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene un mínimo en el punto $P(0,0)$.

3. $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

De la gráfica de la función no parece que se pueda concluir que sea un máximo o un mínimo; más bien el dibujo de la función muestra un punto silla.



Vamos a verificarlo.

La condición de primer orden es:

$$f_x = 2x = 0$$
$$f_y = -2y = 0$$

De manera que el punto crítico de la función es: $x_0 = 0,\ y_o = 0$

Ahora probamos la condición de segundo orden para los cual calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = f_{yx} = 0$$

De manera que $f_{xx} > 0$

Y $f_{xx}\ f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 < 0$, En efecto: $(2)(-2) - (0)^2 = -4 < 0$

Vemos entonces que la función $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ tiene un punto silla en el punto $P(0,0)$.