MATEMÁTICAS III

(Carrera de Economía)

FUNCIONES HOMOGÉNEAS Y TEOREMA DE EULER
(http://www.geocities.com/ajlasa)

Las funciones homogéneas ocupan un lugar central en los modelos estándar de la teoría económica. Es por ello que es importante conocer algunas características de estas funciones.

Definición:

Una función real $f(x,y)$ se dice que es **homogénea de grado t** si se cumple que:

$$\boxed{f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^t\, f(x,y)} \qquad (1)$$

Para todo $\lambda > 0$

Ejemplos:

1. La función lineal $z=f(x,y)=a\,x+b\,y$ es homogénea de grado 1. Veamos:

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= a(\lambda x)+b(\lambda y) \\ &= \lambda^1 (ax+by) \\ &= \lambda^1 z \end{aligned}$$

2. La función cuadrática $z=f(x,y)=a\,x\,y$ es homogénea de grado 2.

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= a(\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2 (a\,x\,y) \\ &= \lambda^2 z \end{aligned}$$

3. La función $z=f(x,y)=3\,x\,y^2+y^3+x^2 y$ es homogénea de grado 3. En efecto:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x,\lambda y) &= 3(\lambda x)(\lambda y)^2+(\lambda y)^3+(\lambda x)^2(\lambda y)\\
&= 3(\lambda x)\left(\lambda^2 y^2\right)+\left(\lambda^3 y^3\right)+\left(\lambda^2 x^2\right)(\lambda y)\\
&= 3\left(\lambda^3 xy^2\right)+\left(\lambda^3 y^3\right)+\left(\lambda^3 x^2 y\right)\\
&= \lambda^3\left(3xy^2+y^3+x^2y\right)\\
&= \lambda^3 z
\end{aligned}
$$

Una función especialmente importante en economía es la función Cobb-Douglas. Aunque también se utilizan funciones de este tipo para modelar la utilidad del consumidor, la aplicación original hecha por Cobb y Douglas fue la función de producción:

$$y = f(K,L) = A\,K^{\alpha}L^{\beta}$$

Donde: y es el nivel máximo de producción que puede realizarse con el insumo de capital K y el insumo de trabajo L y A es un índice que representa el estado de la tecnología. (Ver la nota de clase “Tecnología de Producción”).

Veremos que esta función de producción es homogénea de grado $\alpha+\beta$:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda K,\lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta}\\
&= A\left(\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\right)\left(\lambda^{\beta}L^{\beta}\right)\\
&= A\,\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}K^{\alpha}L^{\beta}\\
&= \lambda^{\alpha+\beta}A\,K^{\alpha}L^{\beta}\\
&= \lambda^{\alpha+\beta}\;y
\end{aligned}
$$

Es importante subrayar que en el caso en que $\alpha+\beta=1$ el valor de la función de producción crece en la misma escala en que crecen los insumos de capital y trabajo. Por ello, en este caso tenemos que la función de producción “exhibe rendimientos constantes a escala”.

Teorema de Euler respecto a las funciones homogéneas de grado k.

El matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) demostró el siguiente teorema respecto a las funciones homogéneas de grado k:

Si una función $f(x,y)$ es homogénea de grado k, entonces:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\, x + \frac{\partial f}{\partial y}\, y = k\ f\left(x, y\right)}$$

Aplicando este teorema a la función de producción Cobb – Douglas con rendimientos constantes a escala ($\alpha + \beta = 1$) se deduce que:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial K}\, K + \frac{\partial y}{\partial L}\, L = y}$$

Puesto que las derivadas parciales son las productividades marginales del capital y el trabajo respectivamente y el modelo de competencia perfecta supone que en equilibrio las remuneraciones de los factores son iguales a sus productividades marginales, se deduce que:

$$\boxed{r\ K + w\ L = y}$$

Donde r es la remuneración del capital y w la remuneración del trabajo. Se trata de un resultado importante, pero también polémico, que se estudia en cursos posteriores.