CONSTRUCCIÓN DE FRONTERAS EFICIENTES DE INVERSIÓN

Gerardo Pastrana León

(Este ensayo se elaboró utilizando como bibliografía principal el libro Selección de Inversiones, de Domingo Jorge Messuti, Victor Adrián Alvarez y Hugo Romano Graffi, Ediciones Macchi, 1994, Buenos Aires)

Toda clase de inversiones que se realiza con activos cuyos rendimientos se presentan de manera aleatoria, es decir, se trata de activos de riesgo, implica determinar las proporciones a invertir en cada uno de esos activos.

En el presente trabajo, se mostrará una técnica que permite determinar las proporciones que deben invertirse en cada activo a fin de que dichos portafolios obtenidos mediante ella sean portafolios que se encuentren dentro de la frontera eficiente, es decir, que dado el rendimiento esperado esta cartera es la de mínimo riesgo, o bien de todas las carteras que tienen el mismo nivel de riesgo es la de mayor rendimiento posible.

La expresión matemática del enunciado anterior es:

Minimizar $$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$ **(Riesgo)**

Sujeto a: $$E(Rp) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(Ri)$$ **(Rendimiento esperado prefijado)**

y,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$ **(Restricción presupuestaria)**

donde σ_p^2 es la varianza del portafolio p, es decir el nivel de riesgo

x_i es la proporción a invertir en el activo i

σ_i^2 es la varianza del activo i

σij es la covarianza entre el activo i y el activo j

$E(R_p)$ es el rendimiento esperado del portafolio

$E(R_i)$ es el rendimiento esperado del activo i, obtenido como el promedio de los rendimientos del activo en un periodo de tiempo.

El problema es de mínimos condicionados que puede resolverse por medio de los multiplicadores de Lagrange. La solución a dicho problema se simplifica utilizando técnicas de cálculo matricial para la solución de sistemas lineales.

La función de Lagrange es:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i - E_p\right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

La condición necesaria para la existencia de un extremo local o relativo es que se anulen todas las derivadas parciales,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1\sigma_1^2 + 2(x_2\sigma_{12} + \ldots + x_n\sigma_{1n}) + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2\sigma_2^2 + 2(x_1\sigma_{12} + \ldots + x_n\sigma_{2n}) + \lambda_1 E_2 + \lambda_2 = 0$$

.

.

.

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = 2x_n\sigma_n^2 + 2(x_1\sigma_{1n} + \ldots + x_{n-1}\sigma_{n-1;n}) + \lambda_1 E_n + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_n E_n - E_p = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1 = 0$$

Dividiendo miembro a miembro por dos todas las ecuaciones excepto las dos últimas y ordenando sus términos resulta un sistema de n+2 ecuaciones con n+2 incógnitas, el cual escrito en forma matricial queda de la siguiente manera

$$
\begin{vmatrix}
\sigma_1^2 & \sigma_{12}\ldots & \sigma_{1n} & E_1 & 1 \\
\sigma_{12} & \sigma_2^2\cdots & \sigma_{2n} & E_2 & 1 \\
\sigma_{1n} & \sigma_{2n}\ldots & \sigma_n^2 & E_n & 1 \\
E_1 & E_2\ldots & E_n & 0 & 0 \\
1 & 1\ldots & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_n \\ \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{\lambda 2}{2}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ E_p \\ 1
\end{vmatrix}
$$

y aún más brevemente

CX = B

En donde si el determinante de la matriz del sistema lineal es distinto de cero (determinante de C ≠ 0), entonces este sistema tiene una solución única que puede calcularse despejando la matriz de proporciones X de la fórmula anterior, es decir

$$\mathbf{X = C^{-1}B}$$

El vector solución X nos da las x_i proporciones que deben invertirse en cada uno de los activos para conformar una cartera cuyo rendimiento esperado prefijado es E_p y cuyo riesgo es mínimo. La solución entonces, se calcula realizando el producto de la inversa de la matriz de los coeficientes (matriz de varianzas y covarianzas) por el vector columna de los términos independientes.

Para ejemplificar lo anterior tomaremos un grupo de cuatro acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores cuyas principales características se presentan en el siguiente cuadro:

Acción	**Rendimientos esperados nominales**	**Rendimientos esperados reales***	**Varianza**	**Desviación Estándar**
Alfa A	0.0193	0.0043	0.0196	0.1401
CIFRA C	0.0201	0.0051	0.0150	0.1223
TELMEX L	0.0222	0.0073	0.0244	0.1563
POSADAS L	0.0274	0.0126	0.0349	0.1869

*Ajustados con el INPC

Los rendimientos esperados nominales son el promedio de las variaciones en los precios de las acciones para el periodo de febrero de 1993 hasta febrero del 2000, a los rendimientos esperados nominales se les hizo un ajuste por inflación con el INPC mediante la ecuación de Fisher[1] para obtener los rendimientos esperados reales.

La matriz de varianzas y covarianzas del grupo de acciones es la siguiente, en donde los números de la diagonal en negritas son las varianzas de cada activo

Matriz de varianzas y covarianzas				
	Alfa A	**CIFRA C**	**TELMEX L**	**POSADAS L**
Alfa A	**0.0196**	0.0075	0.0050	0.0092
CIFRA C	0.0075	**0.0150**	0.0061	0.0038
TELMEX L	0.0050	0.0061	**0.0244**	0.0028
POSADAS L	0.0092	0.0038	0.0028	**0.0349**

Ahora debe plantearse el sistema a resolver que permita determinar las proporciones a invertir en cada uno de los activos, este en su forma matricial es el siguiente

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0.0196 & 0.0075 & 0.0050 & 0.0092 & 0.0043 & 1 \\ 0.0075 & 0.0150 & 0.0061 & 0.0038 & 0.0051 & 1 \\ 0.0050 & 0.0061 & 0.0244 & 0.0028 & 0.0073 & 1 \\ 0.0092 & 0.0038 & 0.0028 & 0.0349 & 0.0126 & 1 \\ 0.0043 & 0.0051 & 0.0073 & 0.0126 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda 1/2 \\ \lambda 2/2 \end{vmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Ep \\ 1 \end{vmatrix}}_{B}$$

La solución entonces estará determinada por $\mathbf{X = C^{-1}B}$. El vector solución de este sistema es

$$\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda 1/2 \\ \lambda 2/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -104.3473Ep+0.8927 \\ -39.9509Ep+0.6730 \\ 32.4087Ep+0.0180 \\ 111.8894Ep-0.5837 \\ -484.3090Ep+3.2168 \\ 3.2168Ep-0.0310 \end{vmatrix}$$

En donde los primeros cuatro valores son las proporciones a invertir en cada uno de los activos de acuerdo al rendimiento esperado prefijado. La correspondencia de proporciones es la siguiente: x1=Alfa, x2=Cifra, x3=Telmex L, x4=Posadas L. Las fórmulas que permitirán determinar la proporción a invertir en cada activo de acuerdo al nivel de rendimiento esperado prefijado serán:

[1] [1]La ecuación de Fisher es $r = (i - \pi)/(1+\pi)$, donde r es la tasa real, i es la tasa nominal y π es la inflación para el periodo.

$$x1 = -104.3743Ep + 0.8927$$
$$x2 = -39.9509Ep + 0.6730$$
$$x3 = 32.4087Ep + 0.0180$$
$$x4 = 111.8894Ep - 0.5837$$

Ya que tenemos las fórmulas anteriores, el siguiente paso es determinar cual será el portafolio de mínimo riesgo, perteneciente a la frontera eficiente, para nuestro grupo de cuatro activos.

Entonces el problema adicional es: **calcular las proporciones x_i que hacen σ^2_p mínimo, independientemente de $E(R_p)$.**

La solución implica minimizar el riesgo antes descrito con sus respectivas restricciones, para lo cual se tiene la siguiente función de Lagrange:

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

La condición necesaria de extremos es la anulación de todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1\sigma_1^2 + 2(x_2\sigma_{12} + ... + x_n\sigma_{1n}) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2\sigma_2^2 + 2(x_1\sigma_{12} + ... + x_n\sigma_{2n}) + \lambda = 0$$

.

.

.

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = 2x_n\sigma_n^2 + 2(x_1\sigma_{1n} + ... + x_{n-1}\sigma_{n-1;n}) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 + ... + x_n - 1 = 0$$

Dividiendo miembro a miembro por 2 todas las ecuaciones excepto la última, y ordenándolas convenientemente queda:

$$\sigma_1^2 x_1 + \sigma_{12} x_2 + ... + \sigma_{1n} x_n + \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$\sigma_{12} x_1 + \sigma_2^2 x_2 + ... + \sigma_{2n} x_n + \frac{\lambda}{2} = 0$$

.

.

.

$$\sigma_{1n} x_1 + \sigma_{2n} x_2 + ... + \sigma_n^2 x_n + \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

la representación matricial de este sistema de n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas es:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} \dots & \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \\ \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

que puede expresarse sintéticamente

C*X* = B*

si el determinante de C* es diferente de cero, entonces, el sistema anterior tiene una solución única que puede calcularse en función de la inversa de la matriz C* y del vector columna de los términos independientes B*, según la siguiente fórmula:

$X^* = C^{*-1}B^*$

Para nuestro ejercicio el sistema matricial es

$$\begin{vmatrix} 0.0196 & 0.0075 & 0.0050 & 0.0092 & 1 \\ 0.0075 & 0.0150 & 0.0061 & 0.0038 & 1 \\ 0.0050 & 0.0061 & 0.0244 & 0.0028 & 1 \\ 0.0092 & 0.0038 & 0.0028 & 0.0349 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Haciendo el calculo de la inversa para la matriz C* [2] tenemos

$$\begin{vmatrix} 66.4499 & -37.8131 & -10.3459 & -18.2909 & 0.1996 \\ -37.8131 & 70.8548 & -25.6576 & -7.3841 & 0.4076 \\ -10.3459 & -25.6576 & 40.3864 & -4.3829 & 0.2333 \\ -18.2909 & -7.3841 & -4.3829 & 30.0579 & 0.1595 \\ 0.1996 & 0.4076 & 0.2333 & 0.1595 & -0.0096 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda/2 \end{vmatrix}$$

que nos da el siguiente vector solución:

$$\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1996 \\ 0.4076 \\ 0.2333 \\ 0.1595 \\ -0.0096 \end{vmatrix}$$

al igual que en el caso anterior, las cuatro primeras componentes de este vector son las proporciones que permiten construir el portafolio de mínimo riesgo. El rendimiento esperado y la varianza de este portafolio se calculan con las fórmulas para rendimiento esperado y para riesgo presentadas al principio de este trabajo, por lo tanto:

$Ep^* = (0.1996)0.0043 + (0.4076)0.0051 + (0.2333)0.0073 + (0.0126)0.1595 = 0.0066$

$\sigma p^2 = 0.0096$

$\sigma p = 0.0981$

Se tiene entonces que el punto (0.0066, 0.0981) pertenece a la frontera eficiente y representa el portafolio de mínimo riesgo, para calcular otras carteras pertenecientes a la frontera eficiente debe determinarse para distintos valores de rendimiento superiores a 0.0066 real mensual con las fórmulas para las proporciones que se obtuvieron con anterioridad. Para facilitar su utilización se presentaran nuevamente:

[2] Para el cálculo de la matriz inversa se puede utilizar algún paquete computacional como el Excel, en el caso de este el calculo de la matriz inversa se hace de la siguiente manera: 1) Se selecciona la matriz de la cual se quiere obtener la inversa, 2) Se selecciona un rango de celdas vacías con las mismas dimensiones que la matriz de la cual se quiere obtener la inversa, 3) se teclea la siguiente indicación =MINVERSA(rango donde se encuentra la matriz) si por ejemplo la matriz de la cual se quiere obtener la inversa esta dentro del rango A1 a F8 se debe escribir (A3:F8) o bien seleccionar el rango arrastrando el mouse. 4) Por ultimo se teclean las siguientes teclas simultáneamente Control+Shift+Enter.

$$x1 = -104.3743Ep + 0.8927$$
$$x2 = -39.9509Ep + 0.6730$$
$$x3 = 32.4087Ep + 0.0180$$
$$x4 = 111.8894Ep - 0.5837$$

Con el cálculo de las fórmulas anteriores y dando a Ep valores superiores a el rendimiento de mínimo riesgo obtenemos otros puntos pertenecientes a la frontera eficiente.

Proporciones, rendimientos esperados y riesgo de portafolios pertenecientes a la frontera eficiente.

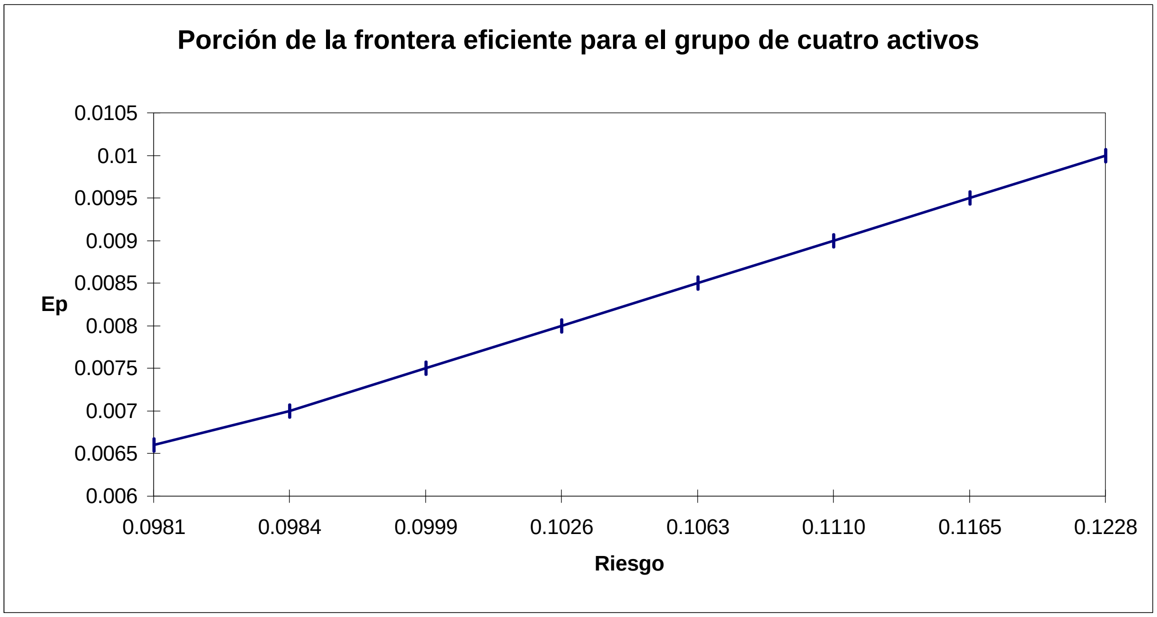
Portafolio no.	1	2	3	4	5	6	7	8
Ep	**0.0066**	**0.007**	**0.0075**	**0.008**	**0.0085**	**0.009**	**0.0095**	**0.01**
Proporciones								
x1	0.1996	0.1623	0.1101	0.0579	0.0057	-0.0464	-0.0986	-0.1508
x2	0.4076	0.3933	0.3734	0.3534	0.3334	0.3134	0.2934	0.2735
x3	0.2333	0.2449	0.2611	0.2773	0.2935	0.3097	0.3259	0.3421
x4	0.1595	0.1995	0.2555	0.3114	0.3674	0.4233	0.4792	0.5352
Suma	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Varianza	0.0096	0.0097	0.0100	0.0105	0.0113	0.0123	0.0136	0.0151
Desv. Est.	0.0981	0.0984	0.0999	0.1026	0.1063	0.1110	0.1165	0.1228

En las proporciones a invertir en cada uno de los activos, nos encontramos, con elementos de signo negativo, estas tienen su interpretación empírica racional basada en el concepto de venta corta.

Otra observación de el cuadro anterior permite advertir que las proporciones a invertir en cada uno de los activos, que integran los portafolios eficientes, varían en forma monótona, es decir, crecen o decrecen constantemente a medida que se incrementa el rendimiento esperado de esas carteras.

En el caso de no poderse llevar a cabo ventas descubiertas es posible retirar del portafolio aquellos activos que presentan proporciones negativas, con esto se reduciría en un elemento la matriz C.

La gráfica correspondiente a los portafolios del cuadro anterior es la siguiente:



De esta manera se han encontrado las proporciones a invertir en cada uno de los activos a fin de que al tener un determinado nivel de riesgo sean las de mayor rendimiento, o bien, a un determinado nivel de rendimiento prefijado permitan minimizar el riesgo. En el caso de este ejemplo se ha tomado una base de datos extensa que nos ha permitido obtener de manera directa los datos necesarios para el cálculo de la frontera eficiente, sin embargo, no siempre es tan sencillo crear una buena base de datos con los datos históricos para cada activo. Por esta razón, se mostrará a continuación un método por medio del cual podemos construir fronteras eficientes con un número mucho menor de datos, además de que los datos que utilizaremos para este método son proporcionados por la Bolsa Mexicana de Valores de manera regular.

UN MODELO QUE SIMPLIFICA LA CONSTRUCCIÓN DE CARTERAS EFICIENTES.

El modelo del índice único (MIU)

En la construcción de carteras eficientes presentada anteriormente, los datos necesarios para lograr la construcción es cada vez mayor mientras aumenta el número de activos que se utilizarán en dicha construcción.

El MIU se sustenta en la idea básica que el precio de los títulos que cotizan en un mercado, en promedio, crecen o decrecen junto con algún indicador económico.

La ecuación fundamental del modelo es:

$$\mathbf{R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i}$$

donde:

R_i: es la variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del activo i

R_m: es la variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento de un índice representativo del mercado

α_i; β_i: son los parámetros del modelo correspondiente al activo i

e_i: es el desvío aleatorio entre el rendimiento real del activo i y su valor teórico (variable aleatoria).

El valor del parámetro α_i es la componente del rendimiento del activo i que es independiente del rendimiento del índice del mercado.

El valor de β_i es una medida de la sensibilidad de respuesta del rendimiento del activo i ante las variaciones en el rendimiento del índice tomado como representativo del mercado.

Los supuestos en que esta basado el MIU son los siguientes:

1) El proceso generador de los rendimientos R_i de cada activo esta determinado por la ecuación $\mathbf{R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i}$
2) La variable aleatoria e_i tiene esperanza matemática igual a cero:
$$\mathbf{E(e_i) = 0}$$
3) Las variables aleatorias R_m y e_i están incorrelacionadas:
$$\mathbf{COV(e_i ; R_m) = 0}$$
4) Los errores aleatorios correspondientes a activos distintos están incorrelacionados entre sí:
$$\mathbf{COV(e_i ; e_j) = 0 \qquad i \neq j}$$

Las fórmulas que permiten el cálculo de todos los parámetros necesarios para la construcción de portafolios eficientes son las siguientes:

a) Los rendimientos esperados serán

$$\mathbf{E_i = E(R_i) = E(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i)}$$

utilizando las propiedades de la esperanza matemática tenemos

$$\mathbf{E_i = \alpha_i + \beta_i E_m}$$

b) Las varianzas estarán dadas por

$$\mathbf{\sigma_i^2 = var(R_i) = var(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i)}$$

Aplicando las propiedades de la varianza y teniendo en cuenta que α_i y β_i son constantes se puede deducir que

$$\mathbf{\sigma_i^2 = \beta_i^2\ var(R_m) + var(e_i)}$$

Si se define:

$$\mathbf{var(R_m) = \sigma_m^2 \qquad y \qquad var(e_i) = Q_i^2}$$

puede escribirse

$$\mathbf{\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + Q_i^2}$$

c) En cuanto a las covarianzas se tiene lo siguiente

$$\mathbf{\sigma_{ij} = cov(R_i ; R_j) = E[(R_i - E_i)(R_j - E_j)]}$$

Reemplazando los valores de las variables antes encontradas tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{\sigma_{ij}} &= \mathbf{E\{[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i - (\alpha_i + \beta_i E_m)][\alpha_j + \beta_j R_m + e_j - (\alpha_j + \beta_j E_m)]\}} = \\ &= \mathbf{E\{[\beta_i (R_m - E_m) + e_i][\beta_j (R_m - E_m) + e_j]\}}\end{aligned}$$

Efectuando el producto entre llaves

$$\mathbf{\sigma_{ij} = E[\beta_i \beta_j (R_m - E_m)^2 + \beta_i (R_m - E_m) e_j + \beta_j (R_m - E_m) e_i + e_i e_j]}$$

Aplicando las propiedades de la esperanza matemática:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j E\left[(R_m - E_m)^2\right] + \beta_i E\left[(R_m - E_m)e_j\right] + \beta_j E\left[(R_m - E_m)e_i\right] + E\left(e_i e_j\right)$$

En el primer sumando $E\left[(R_m - E_m)^2\right]$ es σ_m^2, el segundo y tercer sumandos se anulan en virtud del supuesto 3) del MIU; mientras que el último sumando también se anula en razón del supuesto 4), por lo que solo nos queda que la covarianza estará dada por:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

De todo lo anterior tenemos entonces que este método puede ser utilizado si se dispone de estimaciones para cada uno de los activos de riesgo en consideración, del rendimiento esperado E_i, la desviación estándar σ_i y el coeficiente β_i, así como de los parámetros del indicador del mercado E_m y σ_m. El rendimiento esperado del portafolio se puede calcular directamente con el promedio ponderado de los rendimientos esperados individuales. En tanto que para calcular la varianza de los desvíos de cada titulo Q_i^2, puede despejarse su valor de la fórmula descrita antes con lo que quedaría

$$Q_i^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2 \sigma_m^2$$

La mayor dificultad al realizar las fronteras eficientes de inversión es la de obtener las varianzas y covarianzas entre los activos con los que se va a trabajar, este trabajo disminuye considerablemente si utilizamos el MIU.

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos de correr las regresiones $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$ para cada uno de los cuatro activos, la variable que hemos tomado como índice representativo del mercado es el Indice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Las regresiones se han corrido para los cambios mensuales en los precios de las acciones y del índice, el periodo fue de febrero de 1993 a febrero del 2000.

Resultados de las regresiones
ALFA = 0.0087217118 + 0.47513474*IPYC
CIFRAC = 0.0072574343 + 0.57592548*IPYC
TELMEX = 0.010796038 + 0.51250945*IPYC
POSADAS = 0.016846831 + 0.47588264*IPYC

En el siguiente cuadro se muestran los datos necesarios para el cálculo de las varianzas y las covarianzas que se necesitan para el cálculo de la frontera eficiente

Activo	Alfa	Beta	Varianza del activo	Qi^2
Alfa A	0.0087	0.4751	0.0196	0.0177
CIFRA C	0.0073	0.5759	0.0150	0.0121
TELMEX L	0.0108	0.5125	0.0244	0.0222
POSADAS L	0.0168	0.4759	0.0349	0.0330
Varianza del ipyc			0.0086	
Rendimiento esperado del ipyc*			0.0083	

*En valor real

La columna Qi^2 se construyó mediante la fórmula $\mathbf{Q_i^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2 \sigma_m^2}$.

La construcción de la frontera eficiente requiere en primer lugar de la matriz de varianzas y covarianzas, para lo cual se utilizarán las siguientes fórmulas:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + Q_i^2$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

Matriz de Varianzas y Covarianzas				
	Alfa A	CIFRA C	TELMEX L	POSADAS L
Alfa A	**0.01964**	0.00235	0.00209	0.00194
CIFRA C	0.00235	**0.01496**	0.00253	0.00235
TELMEX L	0.00209	0.00253	**0.02443**	0.00209
POSADAS L	0.00194	0.00235	0.00209	**0.03493**

De tal manera que el numero ubicado en la primera fila y la primera columna representa la varianza de los rendimientos del activo uno (Alfa A) y fue calculado mediante la fórmula de la varianza

$$\sigma_1^2 = 0.4751^2 \times 0.0086 + 0.0177 = 0.0196$$

El elemento situado en la primera fila segunda columna representa la covarianza entre los rendimientos de las acciones de Alfa y Cifra C y sé calculo con la formula de la covarianza

$$\sigma_{12} = 0.4751 \times 0.0759 \times 0.0086$$

Ya con la matriz de varianzas y covarianzas obtenida se procede al cálculo de la frontera eficiente tal y como se mostró anteriormente.

Portafolio de mínimo riesgo. Para el cálculo de este se resuelve el siguiente sistema matricial:

$$\begin{vmatrix} 0.0196 & 0.0024 & 0.0021 & 0.0019 & 1 \\ 0.0024 & 0.0150 & 0.0025 & 0.0024 & 1 \\ 0.0021 & 0.0025 & 0.0244 & 0.0021 & 1 \\ 0.0019 & 0.0024 & 0.0021 & 0.0349 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Cuyo vector solución es:

$$\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2751 \\ 0.3650 \\ 0.2122 \\ 0.1476 \\ -0.0070 \end{vmatrix}$$

Que nos da las proporciones a invertir para obtener el portafolio de mínimo riesgo perteneciente a la frontera eficiente. Y cuyos valores de riesgo y de rendimiento esperado son los siguientes:

$Ep = 0.0064$
$\sigma p = 0.0836$

Se pueden comprobar estos resultados mediante la utilización de las fórmulas presentadas anteriormente.

A fin de obtener otros portafolios se resuelve el siguiente sistema matricial:

$$\begin{vmatrix} 0.0196 & 0.0024 & 0.0021 & 0.0019 & 0.0043 & 1 \\ 0.0024 & 0.0150 & 0.0025 & 0.0024 & 0.0051 & 1 \\ 0.0021 & 0.0025 & 0.0244 & 0.0021 & 0.0073 & 1 \\ 0.0019 & 0.0024 & 0.0021 & 0.0349 & 0.0126 & 1 \\ 0.0043 & 0.0051 & 0.0073 & 0.0126 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Ep \\ 1 \end{vmatrix}$$

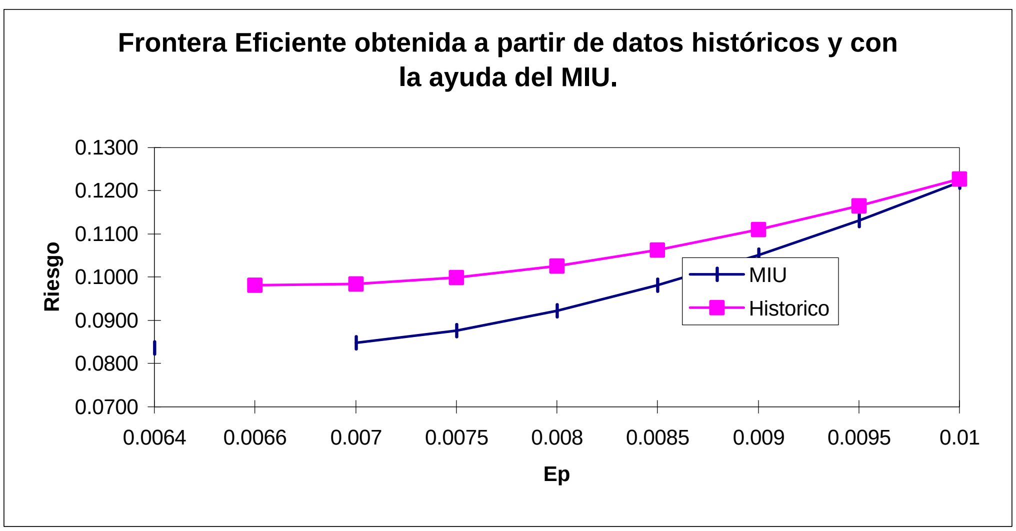
Cuyo vector solución es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -75.3707Ep+0.7614 \\ -67.7677Ep+0.8003 \\ 26.2204Ep+0.0442 \\ 116.9181Ep-0.6059 \\ -622.7719Ep+4.0147 \\ 4.0147Ep-0.0329 \end{vmatrix}$$

Con la ayuda de este nuevo vector solución calculamos las proporciones a invertir en otros portafolios de mayor riesgo al de mínimo riesgo. Los resultados de esta nueva frontera eficiente se muestran a continuación:

Proporciones, rendimientos esperados y riesgo de portafolios pertenecientes a la frontera eficiente con la matriz de varianzas y covarianzas obtenida mediante el MIU.								
Portafolio no.	1	2	3	4	5	6	7	8
Ep	0.0064	0.007	0.0075	0.008	0.0085	0.009	0.0095	0.01
Proporciones								
x1	0.2751	0.2338	0.1961	0.1584	0.1207	0.0831	0.0454	0.0077
x2	0.3650	0.3260	0.2921	0.2582	0.2243	0.1904	0.1565	0.1226
x3	0.2122	0.2278	0.2409	0.2540	0.2671	0.2802	0.2933	0.3064
x4	0.1476	0.2125	0.2709	0.3294	0.3879	0.4463	0.5048	0.5632
Suma	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Varianza	0.0070	0.0072	0.0077	0.0085	0.0096	0.0111	0.0128	0.0149
Desv. Est.	0.0836	0.0848	0.0877	0.0922	0.0981	0.1052	0.1132	0.1219

La comparación entre los resultados obtenidos a partir de los datos históricos y los resultados obtenidos con la ayuda del MIU se pueden observar en la siguiente gráfica:



La diversificación de los portafolios de inversión es un elemento muy importante para lograr reducir en gran medida los riesgos inherentes a toda clase de inversiones, sin embargo, la sola diversificación de las carteras no garantiza que se este logrando un nivel óptimo en los rendimientos y un nivel mínimo de riesgo. Por esta razón la utilización de una técnica para lograr hacer que los portafolios por ella construidos den como resultado el mayor nivel de eficiencia posible se vuelve fundamental.

Los métodos presentados en el presente trabajo permiten construir portafolios pertenecientes a la frontera eficiente de acuerdo a las preferencias particulares de cada inversionista, es decir, de acuerdo al nivel de riesgo que se este dispuesto a asumir y del nivel de rendimiento que a cada uno le parece más conveniente.

Se tiene además la posibilidad de, a fin de reducir aun más los niveles de riesgo, combinar portafolios eficientes con activos libres de riesgo como pueden ser, en el caso de México, los Certificados de Tesorería (CETES) o algún otro titulo de deuda gubernamental que se consideran activos sin riesgo[3]. La utilización de estos activos, por lo general, reducen en alguna medida el nivel de rendimiento esperado, pero este es compensado con la reducción también en el riesgo.

En el caso de los datos necesarios para construir la frontera eficiente con el MIU, existe una publicación mensual llamada “Indicadores Bursátiles de la Bolsa Mexicana de Valores” en la que en sus distintas secciones se encuentran las estadísticas necesarias, como por ejemplo los coeficientes Alfa y Beta que se encuentran en las *Estadísticas de Sensibilidad del Mercado*, la variabilidad de cada acción se puede encontrar en la sección *Volatilidad de las Principales Emisoras e Índices*.

Los dividendos pagados por cada acción es otro elemento muy importante que no se ha tomado en cuenta en este trabajo, en el que se han empleado solamente cambios en los precios, sin embargo, la consideración de este elemento adicional tiene un efecto positivo ya que incrementa el nivel de rendimiento de los portafolios de inversión que hemos calculado tomando solo en cuenta las variaciones en los precios, es decir, además de los rendimientos de los cambios en los precios de las acciones se tendrán rendimientos también por los dividendos pagados por cada acción.

[3] Aunque se consideran activos libres de riesgo, en realidad no existe ninguna clase de activos que no tengan algún nivel de riesgo. En el caso de los CETES, estos se venden con descuento, por lo que un elevado nivel de inflación en el periodo puede dar como resultado una tasa muy baja de interés e incluso, negativa.