Clase 6

Volatilidad del precio del bono y riesgo financiero: duración y duración modificada

6.1 Duración de un bono

Es muy importante el estudio de la relación entre la sensibilidad del precio del bono respecto a cambios en la tasa de interés (y por ello de la TRV). El tema ha llevado a desarrollar algunos indicadores que sirven para medir la volatilidad potencial del precio de los bonos y por lo tanto **el riesgo** para el inversionista, así como también para desarrollar mecanismos de control de ese riesgo.

Si bien el plazo o madurez de un instrumento de deuda es un indicador valioso de esta volatilidad potencial respecto a la tasa de interés (a igualdad de todo lo demás, el precio del bono es más sensible respecto a la tasa de interés cuanto mayor sea su plazo), el plazo no da necesariamente una idea completa de la respuesta de sus precios respecto a cambios en la tasa de interés. Cuando se trate de títulos diferentes, lo que importa es algún indicador del **plazo promedio de recuperación** del precio del título, lo cual depende no sólo del tiempo que falte para su vencimiento sino del perfil temporal de todos los flujos que promete el bono. Recordemos que el precio teórico del bono no es otra cosa que la suma de los valores presentes de todos los flujos del título descontados a la tasa de rendimiento requerida por el inversionista.

$$P_b = \frac{C_1}{1+y_p} + \frac{C_2}{{1+y_p}^{2}} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{{1+y_p}^{n-1}} + \frac{C_n + F}{{1+y_p}^{n}}$$

Si dividimos ambos lados por P_b tenemos n términos cuyos valores presentes descontados representan cada uno de ellos una proporción del precio total del bono. En efecto:

$$1 = \frac{\frac{C_1}{1+y_p}}{P_b} + \frac{\frac{C_2}{(1+y_p)^2}}{P_b} + \cdots + \frac{\frac{C_{n-1}}{(1+y_p)^{n-1}}}{P_b} + \frac{\frac{C_n + F}{(1+y_p)^n}}{P_b} \qquad (6.1)$$

El inversionista en un bono con cupones de intereses recupera su inversión gradualmente a medida que cobra los cupones y, finalmente, el valor nominal del título. Ponderando cada uno de estos términos por el tiempo que resta para su pago, se deduce el concepto de **duración**, también conocido como duración de Macaulay.

$$D = 1\left(\frac{\frac{C_1}{1+y_p}}{P_b}\right) + 2\left(\frac{\frac{C_2}{(1+y_p)^2}}{P_b}\right) + \cdots + (n-1)\left(\frac{\frac{C_{n-1}}{(1+y_p)^{n-1}}}{P_b}\right) + n\left(\frac{\frac{C_n + F}{(1+y_p)^n}}{P_b}\right) \qquad (6.2)$$

El cálculo de la duración en (6.2) es una medición en términos de periodos, años, semestres, etc. aunque habitualmente se expresa en términos de años.

Ejemplo 6.1

Supongamos que se tiene un bono al cual le faltan cuatro años para su vencimiento. El bono paga cupones **anuales** de interés al 8% anual y el valor nominal al vencimiento es de $ 100.

En el momento de la valuación del bono, la tasa de rendimiento al vencimiento es del 12% anual. El precio del instrumento es:

$$
\begin{aligned}
P_b &= \frac{8}{1.12} + \frac{8}{(1.12)^2} + \frac{8}{(1.12)^3} + \frac{108}{(1.12)^4} = \\
&= 7.143 + 6.378 + 5.694 + 68.636 \\
&= 87.851
\end{aligned}
$$

Calculamos la duración como:

$$
\begin{aligned}
D &= 1\,\frac{7.143}{87.851} + 2\,\frac{6.378}{87.851} + 3\,\frac{5.694}{87.851} + 4\,\frac{68.636}{87.851} \\
&= 0.0813 + 0.1452 + 0.1945 + 3.1251 \\
&= 3.546
\end{aligned}
$$

Cuando los periodos que faltan para el vencimiento de un bono son numerosos, resulta muy conveniente cuantificar la duración del título en la hoja de cálculo. En este ejemplo tenemos:

Tabla 6.1

Tasa cupón =		**8%**	
TRV =		**12%**	
Periodo t	**Flujo de Caja**	**VP del Flujo**	**t x VP**
1	**8**	**7.143**	**7.143**
2	**8**	**6.378**	**12.755**
3	**8**	**5.694**	**17.083**
4	**108**	**68.636**	**274.544**
	Suma =	**87.851**	**311.524**
	D = 311.524 / 87.851 =		**3.546**

Resultado: El bono tiene una duración de 3.546 periodos, en este caso, 3.546 años.

Puede verse en (6.2) que la duración de un bono depende no sólo del plazo ($\boldsymbol{n}$) sino también de la **tasa del cupón** que determina el valor de $\boldsymbol{C}$ y de la TRV por periodo ($\boldsymbol{y_p}$).

6.2 Una fórmula cerrada para la duración de un bono con cupones.

Puesto que tenemos una fórmula cerrada que da cuenta del precio de un bono con cupones con periodos completos al vencimiento:

$$P_b = \frac{C}{y_p} + \left[\frac{F - C / y_p}{(1 + y_p)^n} \right]$$

Es posible deducir usando cálculo y una laboriosa operación algebraica, la siguiente fórmula cerrada que da cuenta de la duración de un bono:

$$-\frac{dP_b}{dy_p}\frac{1}{P_b}(1 + y_p) = D = \frac{1 + y_p}{y_p} - \frac{1 + y_p + n(i_p - y_p)}{y_p + i_p\left[(1 + y_p)^n - 1\right]} \qquad (6.3)$$

Donde n es el número de cupones que faltan pagar, i_p es la tasa de interés del cupón correspondiente al periodo del mismo, $i_p = i / m$ y $y_p = y / m$ es la TRV del periodo. Debe tenerse en cuenta que la duración según (6.3) se mide en periodos, de manera que si el periodo es inferior a un año, la duración del bono en términos de años se calcula dividiendo la anterior por el número de periodos en que se haya dividido el año, esto es, la frecuencia de pago de los cupones.

Ejemplo 6.2

Consideremos el mismo bono del ejemplo (6.1) el cual tiene un valor nominal de $100, paga cupones anuales al 8% anual, su tasa anual requerida de rendimiento es del 12% y faltan cuatro años para su vencimiento. Los datos son, por lo tanto: n = 4, $i_p = i$ = 0.08, $y_p = y$ = 0.12. De acuerdo con (6.3), la duración es:

$$D = \frac{1+0.12}{0.12} - \frac{1+0.12+4\,(0.08-0.12)}{0.12+0.08\left[(1+0.12)^4-1\right]} = 3.546$$

Que es el resultado obtenido antes desplegando todos los flujos del bono

6.3 Duración y duración modificada como medidas de sensibilidad del precio del bono respecto a cambios en la tasa de interés

Puede verse que la fórmula cerrada de duración (6.3) involucra una derivada ($\frac{dP_b}{dy_p}$), dividida por el precio del bono y multiplicada por $1+y_p$. La expresión $\frac{dP_b}{dy_p}\frac{1}{P_b}$ no es otra cosa que la tasa de variación proporcional del precio del bono por unidad de cambio en la TRV. De tal manera que partiendo de (6.3) podemos deducir fácilmente que esta tasa de variación proporcional como respuesta a cambios en las tasas de interés y de la TRV – una medida de la volatilidad potencial del precio del bono – es lo que se llama **duración modificada** (D_M) del instrumento de deuda:

$$D_M = -\frac{dP_b}{dy_p}\frac{1}{P_b} = \frac{D}{(1+y_p)} \qquad (6.4)$$

Alternativamente, con una simple alteración algebraica podemos replantear la anterior de una manera que nos proporciona la tasa de variación proporcional del precio del bono por unidad de variación de la TRV:

$$\frac{dP_b}{P_b} = -D_M \; dy_p \qquad (6.5)$$

Usando (6.4) la duración modificada del bono que usamos en los ejemplos (6.1) y (6.2) es:

$$D_M = -\frac{dP_b}{dy_p}\frac{1}{P_b} = \frac{3.5466}{(1+0.12)} = 3.16607$$

Y la tasa de variación proporcional del precio del bono por unidad de cambio en la TRV es usando (6.5):

$$\frac{dP_b}{P_b} = -3.166 \; dy_p$$

El indicador duración modificada nos dice que, **aproximadamente**, el precio del bono aumenta 3.166% cuando la TRV se reduce en un punto porcentual o bien baja 3.166% si la TRV aumenta en un punto porcentual.

Ejemplo 6.3

Consideramos el mismo bono de los ejemplos anteriores. El bono tiene un valor a su vencimiento de $100, vence dentro de cuatro años exactos, paga cupones anuales de 8% y se vende con una TRV de 12%. El precio teórico calculado del bono es 87.851.

a. Si la TRV **aumentara** un punto porcentual, esto es a 13%, el precio del bono **bajaría** a $85.128. El precio se reduce **3.10%.**

b. Si la TRV **disminuyera** un punto porcentual, esto es a 11%, el precio del bono **aumentaría** a $ 90.693. El precio aumenta **3.24%**.

De manera que la variación del precio del bono ante un cambio de un punto porcentual de la tasa requerida por el inversionista está en un rango de 3.10% - 3.24%. La duración modificada de 3.166 nos dice que aproximadamente esa variación es de 3.166 %. Esta es la importancia de la duración modificada: genera una buena aproximación a la variación del precio del bono.

Problemas:

6.1 Tenemos un bono con valor nominal al vencimiento de $ 100, paga cupones anuales de 10%, su vencimiento es dentro de cinco años exactos y se coloca en el mercado con una TRV de 10%. Calcular:

a. Precio del bono $ ___________ R. 100

b. Duración modificada ______________ R. 3.7908

c. Precio del bono si la TRV sube a 11% $ _____________ R. 96.304

d. Tasa de disminución del precio en el caso anterior ___________% R. 3.696%

e. Precio del bono si la TRV baja a 9% $ ______________ R. 103.889

f. Tasa de aumento del precio en el caso anterior ______________% R. 3.889%

g. ¿Consideras que la duración modificada produce una buena aproximación de la tasa de variación del precio del bono frente a un cambio de un punto porcentual de la TRV?